6. INTEGRALES DE LINEA

6.2. Independencia del camino. Campos conservativos.

Conjuntos conexos y dominios

Un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se llama **conexo** si todo par de puntos de Ω se pueden unir mediante una curva suave a trozos contenida en Ω. En caso contrario, Ω se llama **no conexo**.
Un conjunto abierto Ω es no conexo si se puede expresar como la unión de al menos dos conjuntos abiertos no vacíos y disjuntos.
Un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo se llama **dominio**.

Independencia del camino

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio (abierto y conexo) y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Se dice que la integral de F es **independiente del camino que une** A **con** B, $A, B \in \Omega$, si la integral de línea de F siempre da el mismo resultado sobre cualquier curva (simple y suave a trozos) $\gamma \subset \Omega$ que une A con B. En este caso, y puesto que la integral sólo depende del origen A y del extremo B, se suele representar

$$\int_\gamma F\,ds = \int_A^B F\,ds$$

Si lo anterior ocurre para cualesquiera $A, B \in \Omega$, se dice que la integral de línea de F es **independiente del camino en** Ω.

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio, y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con derivadas parciales en cada punto de Ω. Se llama **gradiente** de f al campo vectorial $\nabla f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definido por

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)(\mathbf{x})$$

Teorema (Segundo teorema fundamental del cálculo para integrales de línea)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$ (diferenciable con gradiente continuo). Entonces, para cualesquiera puntos $A, B \in \Omega$ y cualquier curva $\gamma \subset \Omega$ que va de A a B, se cumple que

$$\int_\gamma \nabla f\,ds = f(B) - f(A)$$

y, por tanto, la integral de línea de ∇f es independiente del camino en Ω.

Consecuencias

1. La integral de línea de un gradiente continuo es cero sobre cualquier curva cerrada (simple y suave a trozos) contenida en el dominio Ω:

$$\oint_\gamma \nabla f\,ds = 0 \ , \quad \forall \gamma \subset \Omega$$

2. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio, $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo, y existe un campo escalar $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable con continuidad tal que $\nabla f = F$, entonces

$$\int_A^B F\,ds = f(B) - f(A) \quad \text{sobre cualquier curva } \gamma \subset \Omega \text{ que va de } A \text{ a } B$$

$$\oint_\gamma F\,ds = 0 \quad \text{sobre cualquier curva cerrada } \gamma \subset \Omega$$

Función potencial

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Se llama **función potencial** de F en Ω a cualquier campo escalar $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$, para todo $\mathbf{x} \in \Omega$.

Teorema (Primer teorema fundamental del cálculo para integrales de línea)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo cuya integral de línea es independiente del camino en Ω. Entonces, dado un punto $A \in \Omega$ arbitrario, la función $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(\mathbf{x}) = \int_A^{\mathbf{x}} F\, ds \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

donde la integral de línea es sobre cualquier curva contenida en Ω que va de A a $\mathbf{x}$, es una función potencial de F en Ω.

Teorema general de caracterización

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Son equivalentes:

(i) Existe función potencial de F en Ω.

(ii) La integral de línea de F es independiente del camino en Ω.

(iii) La integral de línea de F sobre cualquier curva cerrada contenida en Ω es cero.

Campos conservativos

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Se dice que F es un **campo conservativo** en Ω si se cumple una (y, por tanto, todas) de las condiciones equivalentes del teorema anterior de caracterización.

Condiciones necesarias para la existencia de función potencial

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable con continuidad en Ω. Entonces, si F es un campo conservativo se cumple que:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

en Ω, para cada i, j, $1 \leq i, j \leq n$.
Observación: La igualdad de las derivadas cruzadas es una condición necesaria para los campos conservativos, pero <u>no es suficiente</u>, como se pone de manifiesto en los ejemplos que siguen.

Ejemplos

1. Encuentra una función potencial de $F(x,y) = \big(2x + 2y^2,\, 4xy\big)$ utilizando: **(a)** El primer teorema fundamental del cálculo para integrales de línea; **(b)** La definición de función potencial.

2. Usando la definición, encuentra una función potencial de

$$F(x,y,z) = \big(2xyz + z^2 - 2y^2 + 1,\, x^2z - 4xy,\, x^2y + 2xz - 2\big)$$

3. Estudia si es o no conservativo el campo vectorial $F(x,y) = 3x^2y\mathbf{i} + x^3y\mathbf{j}$.

4. Estudia si es o no conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ el campo vectorial $F(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$. En caso negativo, utiliza la definición de función potencial para estudiar si es conservativo en algún otro dominio del plano.

El rotacional

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio, y $F = (P, Q, R) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1(\Omega)$, es decir, diferenciable con continuidad en Ω. Se llama **rotacional** de F al campo vectorial

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

que se suele representar como:

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times F$$

Cuando un campo es conservativo, su rotacional es cero, por lo que se dice que **los campos conservativos son irrotacionales**.

La divergencia

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable con continuidad en Ω, es decir, $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Se define la **divergencia** de F como el siguiente campo escalar:

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

que se suele representar por:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

Propiedades

1. El rotacional de un gradiente es cero, es decir, los campos gradiente son irrotacionales.

2. Los rotacionales tienen divergencia cero.

El operador de Laplace

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio, y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^2(\Omega)$, es decir, diferenciable dos veces con continuidad en Ω. Se define el **operador de Laplace** o **laplaciano** de f como la divergencia de su gradiente, es decir, como:

$$\nabla^2 f = \operatorname{div} \nabla f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2}$$

Ejercicios

1. Estudia si son conservativos los siguientes campos vectoriales, hallando en su caso una función potencial:

- **(a)** $F(x, y) = (y^2 \sin x, \; -2y \cos x)$.
- **(b)** $F(x, y) = (x + y, \; x)$.
- **(c)** $F(x, y, z) = (-2xyze^{-x^2}, ze^{-x^2}, ye^{-x^2})$. Si una función potencial vale 5 en el origen, ¿cuál es su valor en el punto $(-1, 2, 1)$?

2. Calcula la integral de $F(x, y, z) = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$ sobre cualquier curva (simple y suave a trozos) que va de $(-1, 0, 1)$ a $(3, -1, 2)$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. **(a)** Sí, $f(x, y) = -y^2 \cos x$; **(b)** Sí, $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy$;
(c) Sí, $f(x, y, z) = 5 + yze^{-x^2}$, $f(-1, 2, 1) = 5 + 2e^{-1}$.

2. -72.